Konsep Probabilitas

Tjipto Juwono, Ph.D.

September 2017

SURYA UNIVERSITY

Pengertian Probabilitas

$$0 \leq p \leq 1$$

p menggambarkan peluang atau kebolehjadian terjadinya suatu *event*.
Beberapa pengertian penting:

Experiment. Suatu proses yang menghasilkan satu dan hanya satu dari sejumlah kemungkinan pengamatan.

Outcome. Salah satu hasil experiment.

Event. Sekumpulan satu atau lebih outcome dari suatu experiment.

Catatan: Setiap kali experiment dilakukan sehingga menghasilkan outcome, itu disebut *trial*.

Events

Mutually exclusive events. Jika terjadinya suatu event menyebabkan event lain tidak mungkin terjadi.

Independent events. Jika terjadinya suatu event tidak mempengaruhi terjadinya event yang lain.

Collectively exhaustive events. Jika setidak-tidaknya satu event harus terjadi sewaktu suatu eksperiment dilakukan.

Cara Penentuan Probabilitas

1. Classical Probability. Berdasarkan asumsi bahwa semua outcome dari suatu eksperimen mempunyai peluang yang sama.
2. Empirical Probability. Probabilitas dari suatu event adalah fraksi dari berapa kali event yang serupa terjadi di masa lampau.
3. Subjective Probability. Probabilitas dari suatu event ditentukan oleh seseorang berdasarkan informasi yang tersedia.

Classical Probability

$$\text{Probabilitas suatu event} = \frac{\text{Jumlah outcome yang diharapkan}}{\text{Jumlah outcome yang mungkin}}$$

Contoh:
Misalkan kita melempar dadu satu kali, berapa probabilitas keluar angka genap?
Semua outcome yang mungkin adalah: 1,2,3,4,5,6 (6 kemungkinan).
Outcome yang diharapkan: 2,4,6 (3 kemungkinan).
Jadi:

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Empirical Probability

Probabilitas terjadinya suatu event adalah fraksi waktu dari event-event serupa yang terjadi di masa lampau.
Law of Large Numbers:
Semakin besar jumlah trial, maka empirical probability dari suatu event akan semakin mendekati true probability.

Empirical Probability

Contoh:
Pada Februari 1, 2003, pesawat ulang-alik Colombia meledak di udara. Ini adalah musibah kedua dari 123 kali misi ruang angkasa NASA. Berdasarkan informasi ini, hitung probabilitas bahwa misi ruang angkasa NASA di masa depan akan sukses!

$$\begin{aligned}
\text{Probabilitas misi berhasil} &= \frac{\text{Jumlah misi berhasil}}{\text{Jumlah total misi}} \\
&= \frac{121}{128} \\
&= 0.98
\end{aligned}$$

Contoh Subjective Probability

1. Memperkirakan berapa probabilitas tim Indonesia akan lolos babak penyisihan piala dunia yang akan datang.
2. Memperkirakan berapa probabilitas anda akan menikah sebelum usia 30 tahun.
3. Memperkirakan berapa probabilitas presiden Amerika Serikat akan mundur sebelum masa jabatannya berakhir.

Aturan Penjumlahan dalam Menghitung Probabilitas

1. Jika dua event adalah mutually exclusive.

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$$

2. Jika dua event tidak mutually exclusive.

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$$

Contoh

Di sebuah pabrik makanan ringan sebuah mesin mengisi kantong-kantong makanan ringan secara otomatis. Meskipun demikian, ada variasi berat makanan di dalam setiap kantong. Kebanyakan kantong berisi makanan ringan dengan berat yang sesuai. Tetapi ada sejumlah kantong yang *overweight* (terlalu berat) atau *underweight* (terlalu ringan).

Contoh

Pemeriksaan terhadap sampel yang terdiri dari 4000 kantong memberikan hasil sebagai berikut.

Berat	Event	Jumlah Kantong	Probabilitas
Underweight	A	100	0.025
Satisfactory	B	3600	0.9
Overweight	C	300	0.075
		4000	1.0

Berapa probabilitas bahwa suatu kantong akan underweight atau overweight?

A dan C adalah mutually exclusive, sebab tidak mungkin sebuah kantong underweight dan overweight pada saat yang bersamaan.

$$
\begin{aligned}
P(A \text{ } or \text{ } C) &= P(A) + P(C) \\
&= 0.025 + 0.075 \\
&= 0.1
\end{aligned}
$$

Contoh

Berapa probabilitasnya bahwa jika kita mengambil satu kartu secara random dari setumpuk kartu maka kita akan memperoleh raja atau hati?

Kartu	Probabilitas			Penjelasan
Raja	P(A)	=	4/52	4 Raja
Hati	P(B)	=	13/52	13 Hati
Raja Hati	P(A and B)	=	1/52	1 Raja Hati

A dan C tidak mutually exclusive sebab ada kartu yang Raja dan Hati pada saat yang sama.

$$
\begin{aligned}
P(A \; or \; B) &= P(A) + P(C) - P(A \; and \; C) \\
&= 4/52 + 13/52 - 1/52 \\
&= 16/52
\end{aligned}
$$

Aturan Complement

$$P(A) + P(\sim A) = 1$$

Contoh:
Kembali ke pabrik makanan ringan pada contoh sebelumnya.

Berat	Event	Jumlah Kantong	Probabilitas
Underweight	A	100	0.025
Satisfactory	B	3600	0.9
Overweight	C	300	0.075
		4000	1.0

Aturan Complement

Gunakan aturan complement untuk menunjukkan bahwa probabilitas memperoleh kantong yang satisfactory adalah 0.9

Jawab:

$$
\begin{aligned}
P(B) &= 1 - P(\sim B) \\
&= 1 - P(A \ or \ C) \\
&= 1 - [P(A) + P(B)] \\
&= 1 - [0.025 + 0.075] \\
&= 1 - 0.1 \\
&= 0.9
\end{aligned}
$$

Contoh

Sekelompok turis mengunjungi Yogya.
50 orang mengunjungi borobudur, 60 orang mengunjungi prambanan, dan 20 orang mengunjungi dua-duanya. Sementara itu 60 orang mengunjungi tempat lain selain borobudur dan prambanan.

1. Hitung probabilitas mengunjungi borobudur atau prambanan.
2. Hitung probabilitas mengunjungi tempat lain selain borobudur atau prambanan.

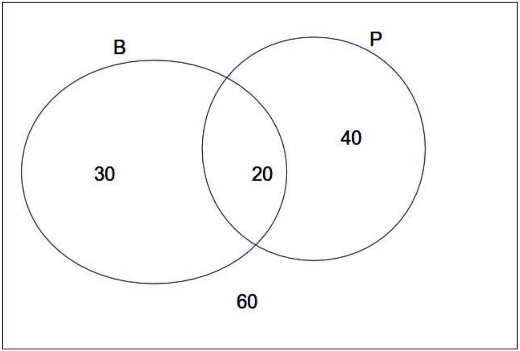
Contoh

B dan P tidak mutually exclusive.

$$\begin{aligned} P(B \text{ } or \text{ } P) &= P(B) + P(P) - P(B \text{ } and \text{ } P) \\ &= \frac{50}{150} + \frac{60}{150} - \frac{20}{150} \\ &= \frac{50+60-20}{150} \\ &= \frac{90}{150} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Contoh

Jawab:
Jumlah yang mengunjungi borobudur: $30 + 20 = 50$
Jumlah yang mengunjungi prambanan: $40 + 20 = 60$
Jumlah yang mengunjungi borobudur atau prambanan: $30+40+20=90$
Jumlah yang mengunjungi borobudur dan prambanan: 20
Jumlah yang mengunjungi tempat lain: 60
Jumlah total turis: $90 + 60 = 150$



$$
\begin{aligned}
P(A \ or \ B) &= \frac{30+20+40}{30+20+40+60} \\
&= \frac{90}{150} \\
&= \frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

Contoh

Probabilitas yang mengunjungi borobudur atau prambanan:

$$P(B\ or\ P) = \frac{90}{150} = \frac{3}{5}$$

Probabilitas mengunjungi tempat lain:

$$P(L) = \frac{60}{150} = \frac{2}{5}$$

Aturan Perkalian

Berlaku jika dua event A dan B adalah independent satu sama lain.

$$P(A\ and\ B) = P(A)P(B)$$

Contoh

Diketahui bahwa 80% dari penduduk sebuah negara (jumlah penduduk 300 juta) makan roti sebagai makanan pokoknya. Andaikan kita memilih 2 orang secara random dari penduduk itu, berapa probabilitasnya bahwa kedua-duanya makan roti sebagai makanan pokok?

Jawab:

Karena jumlah penduduk besar, kita asumsikan bahwa kedua orang itu independent satu sama lain. Dengan demikian probabilitas bahwa kedua orang itu makan roti sebagai makanan pokok adalah:

$$
\begin{aligned}
P(R_1 \; and \; R_2) &= P(R_1)P(R_2) \\
&= 0.8 \times 0.8 \\
&= 0.64
\end{aligned}
$$

Conditional Probability

- Conditional probability adalah probabilitas dari suatu event jika event ini bergantung pada event sebelumnya.
- Conditional probability ditulis

  $$P(B|A)$$

  yang artinya probabilitas event B jika sebelumnya terjadi event A.

Jika pertama-tama terjadi event A, kemudian terjadi event B yang bergantung pada event A, maka probabilitas kedua event itu terjadi (disebut *joint probability*) adalah:

$$P(A \ and \ B) = P(A)P(B|A)$$

Contoh

Di keranjang ada 15 kaos merah dan 5 kaos putih.

1. Pertama-tama sebuah kaos di ambil secara acak, kemudian kaos itu dikembalikan ke keranjang. Selanjutnya kaos kedua di ambil secara acak. Hitung probabilitas bahwa kedua kaos itu berwarna merah.
2. Sebuah kaos di ambil secara acak, tetapi tidak dikembalikan ke keranjang. Selanjutnya kaos kedua juga diambil secara acak. Hitung probabilitas bahwa kedua kaos itu berwarna merah.

Contoh

Jawab:

- Kedua event bersifat independent

$$
\begin{aligned}
P(K_1 \ and \ K_2) &= P(K_1)P(K_2) \\
&= \left(\frac{15}{20}\right)\left(\frac{15}{20}\right) \\
&= \frac{9}{16}
\end{aligned}
$$

- Event kedua adalah conditional

$$
\begin{aligned}
P(K_1 \; and \; K_2) &= P(K_1)P(K_2|K_1) \\
&= \left(\frac{15}{20}\right)\left(\frac{14}{19}\right) \\
&= \frac{21}{38}
\end{aligned}
$$

Contingency Table

Adalah suatu tabel yang digunakan untuk mengklasifikasikan hasil observasi pada suatu sampel menurut dua atau lebih karakteristik.
Contoh:

Film ditonton	Pria	Wanita	Total
0	20	40	60
1	40	30	70
2 atau lebih	10	10	20
	—	—	—
Total	70	80	150

Contingency Table

Contoh:
Tabel berikut memperlihatkan hasil survei terhadap 200 orang karyawan yang diberi pertanyaan: "Apakah anda akan pindah perusahaan jika ada tawaran yang sama atau lebih baik?". Dua ratus karyawan itu digolongkan atas lamanya bekerja, ada yang di bawah 1 tahun, ada yang antara 1-5 tahun, dst.

Loyalitas	$<$ 1th	1-5 th	6-10 th	>10 th	Total
Bersedia tinggal	10	30	5	75	120
Tdk bersedia tinggal	25	15	10	30	80
	—	—	—	—	—
	35	45	15	105	200

Berbagai pertanyaan tentang probabilitas dapat diajukan yang dapat dijawab dengan menggunakan tabel contingency seperti contoh di atas.

Contingency Table

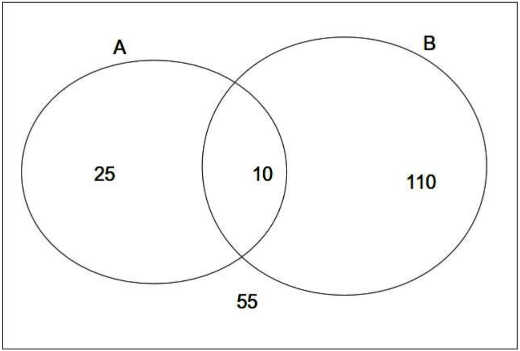
Loyalitas	< 1th	1-5 th	6-10 th	>10 th	Total
Bersedia tinggal	10	30	5	75	120
Tdk bersedia tinggal	25	15	10	30	80
	—	—	—	—	—
	35	45	15	105	200

Dengan menggunakan tabel contingency di atas jawablah pertanyaan berikut:
Hitunglah probabilitas bahwa jika seorang karyawan dipilih secara random maka ia akan bersedia tinggal *atau* mempunyai lama kerja kurang dari 1 tahun.

Contingency Table

- Event A: Karyawan yang bersedia tinggal $P(A) = 120/200 = 0.6$
- Event B: Karyawan dengan lama kerja < 1 tahun
  $P(B) = 35/200 = 0.175$
- A dan B tidak mutually exclusive sebab ada juga karyawan yang bersedia tinggal *dan* dengan lama kerja < 1 tahun. Jadi:
  $P(A \ and \ B) = 10/200 = 0.05$
- Jadi

$$
\begin{aligned}
P(A \ or \ B) &= P(A) + P(B) - P(A \ and \ B) \\
&= 0.6 + 0.175 - 0.05 \\
&= 0.725
\end{aligned}
$$



$$P(A\ or\ B) = \frac{25+10+110}{25+10+110+55}$$

$$= \frac{145}{200}$$

$$= 0.725$$